1.4. Sabit Katsayılı Homojen olmayan Lineer Diferansiyel Denklemler

Bu bölümde n. mertebeden homojen olmayan

$$\ell(D)y = (D^n + p_1 D^{n-1} + \dots + p_{n-1} D + p_n) y = B(x)$$

sabit katsayılı lineer diferansiyel denklemlerin özel ve genel çözümleri için yöntemler vereceğiz.

$\ell(D)y = 0$ homojen denklemin genel çözümü y_h olmak üzere $y_h = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \dots + c_n y_n(x)$ olduğu önceki bölümde gösterildi.

$\ell(D)y = B(x)$ homojen olmayan denklemin sabit içermeyen bir özel çözümü $y_ö$ olmak üzere homojen olmayan denklemin genel çözümünün $y = y_h + y_ö = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \dots + c_n y_n(x) + y_ö$ şeklinde olacağı önceki bölümlerde ifade edilmişti. Yine $\ell(D)y = B_1(x) + B_2(x) + \dots + B_k(x)$ formunda ise $\ell(D)y = B_i(x)$ denklemlerinden ayrı ayrı $y_{ö_i}$ özel çözümleri bulunup $y_ö = y_{ö_1} + y_{ö_2} + \dots + y_{ö_k}$ olarak yazılacağı da ifade edilmişti.

$\ell(D)y = B(x)$ denkleminin $y_ö = v(x)$ özel çözümünü bulmak için

1) Belirsiz katsayılar yöntemi

2) Ters operatörler yöntemi

3) Parametrelerin değişimi yöntemi

yöntemlerini vereceğiz.

1.4.1. Belirsiz Katsayılar Yöntemi

Bu yöntem $\ell(D)y = B(x)$ denkleminde $B(x)$ fonksiyonunun $a, b, c \in \mathbb{R}$, $b \neq 0$, $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere

x^n, e^{ax}, $\sin(bx+c)$, $\cos(bx+c)$

fonksiyonlarından biri ile tanımlı veya bunların bir kaçının lineer toplamı veya çarpımı ile tanımlı olması durumunda geçerlidir. Bu belirsiz katsayı fonksiyonu ve onun türevlerinin oluşturduğu lineer bağımsız kümeyi S ile gösterelim.

Örnek: $u(x)=x^3$ fonksiyonu bir belirsiz katsayı fonksiyonu olup türevleri

$u' = 3x^2, \quad u'' = 6x, \quad u''' = 6, \quad u^{IV} = 0$ olmaktadır. O halde

u ve onun türevlerinin oluşturduğu lineer bağımsız küme

$S = \{x^3, x^2, x, 1\}$ olur.

Örnek: $u(x) = \cos 2x$ fonksiyonu bir belirsiz katsayı fonksiyonu olup türevleri

$u' = -2\sin 2x, \quad u'' = -4\cos 2x, \quad u''' = 8\sin 2x, \quad u^{IV} = 16\cos 2x, \ldots$

olmaktadır. u ve türevlerinin oluşturduğu lineer bağımsız küme $S = \{\cos 2x, \sin 2x\}$ olur.

Örnek: $u = x^2\cos 2x$ fonksiyonu da bir belirsiz katsayı fonksiyonu olup türevleri

$$u' = 2x\cos 2x - 2x^2\sin 2x$$

$$u'' = 2\cos 2x - 8x\sin 2x - 4x^2\cos 2x$$

$$u''' = -12\sin 2x - 24x\cos 2x + 16x^2\sin 2x \;\; \ldots$$

şeklindedir. u ve türevlerinin oluşturduğu lineer bağımsız küme

$$S = \{x^2\cos 2x,\ x^2\sin 2x,\ x\cos 2x,\ x\sin 2x,\ \cos 2x,\ \sin 2x\}$$ olur.

Not: $u(x) = x^3e^x$ ise $S = \{x^3e^x,\ x^2e^x,\ xe^x,\ e^x\}$

$u(x) = e^x\sin x$ ise $S = \{e^x\sin x,\ e^x\cos x\}$

$u(x) = x^m$ ise $S = \{x^m,\ x^{m-1},\ x^{m-2},\ \ldots,\ x,\ 1\}$

$u(x) = \sin x\cos x = \frac{\sin 2x}{2}$ ise $S = \{\sin 2x,\ \cos 2x\}$

$u(x) = e^{mx}$ ise $S = \{e^{mx}\}$

$u(x) = b_0x^m + b_1x^{m-1} + \ldots + b_{m-1}x + b_m$ ise $S = \{x^m, x^{m-1}, \ldots, x, 1\}$

$u(x) = \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ ise $S = \{e^x,\ e^{-x}\}$ şeklindedir.

Çözüm Yöntemi

① İlk olarak $L(D)y=0$ homojen denkleminin $T=\{y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)\}$ temel çözüm kümesi bulunur.

② $B(x)$ fonksiyonunu oluşturan her bir $u_1(x), u_2(x), ..., u_k(x)$ belirsiz katsayı fonksiyonları için $S_1, S_2, ..., S_k$ kümeleri oluşturulur. Bunlardan $S_j = S_i$ veya $S_j \subset S_i$ var ise bu durumda S_j alınmayıp lineer bağımsız $S_1, S_2, ..., S_k$ kümeleri belirlenir.

③ Lineer bağımsız $S_1, S_2, ..., S_k$ kümelerinin herbiri T temel çözüm kümesi ile karşılaştırılır. Bu kümelerden T ile ortak elemanlı olanlar var ise T ile farklı oluncaya kadar x in en küçük pozitif kuvvetiyle çarpılır. Böylece yeniden düzenlenmiş S kümeleri elde edilir.

④ 3. işlemden sonra oluşturulan T ile hiçbir ortak eleman içermeyen $S=\{s_1, s_2, ... s_p\}$ kümesi için $A_1, A_2, ..., A_p$ ler belirsiz sabit katsayılar olmak üzere özel çözüm

$$y_ö = A_1 s_1 + A_2 s_2 + \cdots + A_p s_p$$

formunda aranır.

5. $y_ö$ özel çözümü $L(D) y_ö = B(x)$ denklemini sağlayacağı için bu özdeşlik kullanılarak $A_1, A_2, \ldots, A_p$ belirsiz katsayıları bulunarak $y_ö$ özel çözümü bulunmuş olur.

Örnek: $y'' - 3y' + 2y = 2x^2$ denkleminin çözümünü bulunuz.

$L(\lambda) = 0 \Rightarrow \lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1 \quad \lambda_2 = 2$ olup lineer bağımsız çözümler $y_1 = e^x, y_2 = e^{2x}$ olmak üzere $T = \{e^x, e^{2x}\}$. olup $y_h = c_1 e^x + c_2 e^{2x}$ olur.

$B(x) = 2x^2$ için $S = \{x^2, x, 1\}$ şeklindedir. S ile T kümesinin hiçbir ortak elemanı olmadığından S kümesi değişmez. Özel çözüm $y_ö = Ax^2 + Bx + C$ formunda aranır.

$y_ö$ çözüm olduğu için denklemi sağlaması gerekir. O halde
$y_ö' = 2Ax + B$, $y_ö'' = 2A$ olup bunlar denklemde
yerlerine yazılırsa

$$y_ö'' - 3y_ö' + 2y_ö = 2x^2$$

$$2A - 3(2Ax + B) + 2(Ax^2 + Bx + C) = 2x^2$$

$$2Ax^2 + (2B - 6A)x + (2A - 3B + 2C) = 2x^2$$

dır. Polinomların eşitliğinden

$$2A = 2 \Rightarrow A = 1$$

$$2B - 6A = 0 \rightarrow 2B = 6 \Rightarrow B = 3$$

$$2A - 3B + 2C = 0 \Rightarrow 2 - 9 + 2C = 0 \Rightarrow C = 7/2$$ bulunur.

Özel çözüm

$y_ö = x^2 + 3x + \frac{7}{2}$ olup genel çözüm $y = y_h + y_ö$ dan

$y = c_1 e^x + c_2 e^{2x} + x^2 + 3x + \frac{7}{2}$ olarak bulunur.

Örnek: $y^{(4)} + y'' = 3x^2 + 2x + 1$ denkleminin çözümünü (genel çözümünü) bulunuz.

$\ell(\lambda) = 0 \Rightarrow \lambda^4 + \lambda^2 = 0 \Rightarrow \lambda^2(\lambda^2+1) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0$

ve $\lambda_3 = i$, $\lambda_4 = -i$ olup $T = \{1, x, \cos x, \sin x\}$ olmak üzere $y_h = c_1 + c_2 x + c_3 \cos x + c_4 \sin x$ dur.

$B(x) = 3x^2 + 2x + 1$ için $S = \{x^2, x, 1\}$ şeklindedir.

$T = \{1, x, \cos x, \sin x\}$ ile $S = \{1, x, x^2\}$ nin ortak elemanları bulunmaktadır. S nin her bir elemanı x ile çarpılırsa

$S_1 = \{x, x^2, x^3\}$ olup yine T ile S_1 in bir elemanı ortak olmaktadır. Bir kez daha x ile çarpılırsa $S_2 = \{x^2, x^3, x^4\}$ kümesi ile T nin ortak elemanı kalmaz. Bu durumda özel çözüm

$y_ö = Ax^2 + Bx^3 + Cx^4$ formunda aranır.

$y_{ö} = Ax^2 + Bx^3 + Cx^4$, $y_{ö}' = 2Ax + 3Bx^2 + 4Cx^3$,

$y_{ö}'' = 2A + 6Bx + 12Cx^2$, $y_{ö}''' = 6B + 24Cx$, $y_{ö}^{(4)} = 24C$

ifadeleri verilen denklemde yerine yazılırsa

$$24C + 2A + 6Bx + 12Cx^2 = 3x^2 + 2x + 1$$

olur. Buradan

$$12C = 3 \Rightarrow C = 1/4$$

$$6B = 2 \Rightarrow B = 1/3$$

$$24C + 2A = 1 \Rightarrow 2A = 1 - 24.\frac{1}{4} \Rightarrow 2A = -5 \Rightarrow A = -5/2$$

bulunur. O halde özel çözüm

$$y_{ö} = -\frac{5}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^4$$ şeklindedir.

Genel çözüm $y = y_h + y_{ö}$

$$y = c_1 + c_2x + c_3\cos x + c_4\sin x - \frac{5}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^4$$

bulunur.

Örnek: $y'' - 3y' + 2y = e^x + 2xe^x$ denkleminin genel çözümünü bulunuz.

$$\ell(\lambda) = 0 \Rightarrow \lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 2 \Rightarrow T = \{e^x, e^{2x}\}$$

olup $y_h = c_1 e^x + c_2 e^{2x}$ dir.

$u_1(x) = e^x$ için $S_1 = \{e^x\}$

$u_2(x) = xe^x$ için $S_2 = \{xe^x, e^x\}$ olup $S_1 \subset S_2$ olduğundan

$S = \{xe^x, e^x\}$ alınır.

$S = \{xe^x, e^x\}$ ile $T = \{e^x, e^{2x}\}$ kümelerinin ortak elemanı var olduğundan S kümesi x ile çarpılırsa $S^* = \{x^2e^x, xe^x\}$ elde edilir.

S^* ile T'nin ortak elemanı bulunmamaktadır. O halde özel çözüm

$y_ö = Ax^2e^x + Bxe^x$ formunda aranır.

$$y_ö' = 2Axe^x + Ax^2e^x + Be^x + Bxe^x = e^x\left(Ax^2 + (B+2A)x + B\right)$$

$$y_ö'' = e^x\left(Ax^2 + (B+2A)x + B\right) + e^x\left(2Ax + B + 2A\right) = e^x\{Ax^2 + (B+4A)x + 2B + 2A\}$$

$$y_{\ddot{o}}'' - 3y_{\ddot{o}}' + 2y_{\ddot{o}} = e^x + 2xe^x$$

$$e^x\{Ax^2 + (B+4A)x + 2B + 2A\} - 3e^x\{Ax^2 + (B+2A)x + B\}$$
$$+ 2\{Ax^2e^x + Bxe^x\} = e^x + 2xe^x$$

$$\Rightarrow e^x x^2\{\underbrace{A - 3A + 2A}_{0}\} + e^x x\{\underbrace{B + 4A - 3B - 6A + 2B}_{-2A}\} + e^x\{\underbrace{2B + 2A - 3B}_{2A-B}\} = e^x + 2xe^x$$

$$-2A = 2 \Rightarrow A = -1, \qquad 2A - B = 1 \Rightarrow 2(-1) - B = 1 \Rightarrow B = -3$$

$\Rightarrow y_{\ddot{o}} = -x^2e^x - 3xe^x$ bulunur.

genel çözüm

$y = y_h + y_{\ddot{o}} = c_1e^x + c_2e^{2x} - x^2e^x - 3xe^x$ olur.

Örnek: $y'' - 2y' - 3y = x^2 + 2e^x - 10\sin x$ denkleminin genel çözümünü bulunuz.

$\ell(\lambda) = 0 \Rightarrow \lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 3,\ \lambda_2 = -1$ ise $T = \{e^{3x}, e^{-x}\}$ olmak üzere $y_h = c_1 e^{3x} + c_2 e^{-x}$ olur.

$u_1(x) = x^2$ için $S_1 = \{x^2, x, 1\}$

$u_2(x) = 2e^x$ için $S_2 = \{e^x\}$

$u_3(x) = -10\sin x$ için $S_3 = \{\sin x, \cos x\}$

S_1, S_2, S_3 ve T kümelerinin herbiri ayrık kümeler olduğundan özel çözüm $S = \{x^2, x, 1, e^x, \sin x, \cos x\}$ kümesi için aranır. Yani özel çözüm

$y_ö = Ax^2 + Bx + C + De^x + E\sin x + F\cos x$ formunda A, B, C, D, E, F belirsiz katsayıları olarak aranır.

$y_ö' = 2Ax + B + De^x + E\cos x - F\sin x$

$y_ö'' = 2A + De^x - E\sin x - F\cos x$ olup denklemde yazılırsa

$$y_\ddot{o}'' - 2y_\ddot{o}' - 3y_\ddot{o} = x^2 + 2e^x - 10\sin x$$

$$2A + De^x - E\sin x - F\cos x - 4Ax - 2B - 2De^x - 2E\cos x + 2F\sin x$$
$$-3Ax^2 - 3Bx - 3C - 3De^x - 3E\sin x - 3F\cos x = x^2 + 2e^x - 10\sin x$$

$$\Rightarrow -4De^x = 2e^x \Rightarrow -4D = 2 \Rightarrow D = -1/2$$

$$-3Ax^2 = x^2 \Rightarrow -3A = 1 \Rightarrow A = -1/3$$

$$(-E + 2F - 3E)\sin x = -10\sin x \Rightarrow 2F - 4E = -10$$

$$(-F - 2E - 3F)\cos x = 0 \Rightarrow -4F - 2E = 0$$

$$-10E = -20, \quad E = 2, \quad F = -1$$

$$2A - 2B - 3C = 0 \Rightarrow -2B - 3C = \frac{2}{3}$$

$$(-4A - 3B)x = 0 \Rightarrow -4A - 3B = 0 \Rightarrow B = 4/9$$

$$C = -\frac{14}{27}$$

$$y_\ddot{o} = -\frac{1}{3}x^2 + \frac{4}{9}x - \frac{14}{27} - \frac{1}{2}e^x + 2\sin x - \cos x \quad \text{bulunur.}$$

$$y = c_1 e^{3x} + c_2 e^{-x} - \frac{1}{3}x^2 + \frac{4}{9}x - \frac{14}{27} - \frac{1}{2}e^x + 2\sin x - \cos x \quad \text{genel çözümdür.}$$

-M-

Not: B(x) fonksiyonunun türüne göre özel çözümler

① $B(x) = b_1 x^k + b_2 x^{k-1} + \dots + b_{k-1} x + b_k = P_k(x)$ k. dereceden bir polinomise

$y_ö^u = A_k x^k + A_{k-1} x^{k-1} + \dots + A_1 x + A_0$

② $B(x) = b e^{ax}$, $b, a \in \mathbb{R}$ üstel fonksiyon ise

$y_ö^u = A e^{ax}$

③ $B(x) = b_1 \sin ax + b_2 \cos ax$, $a, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$ trigonometrik fonksiyonise

$y_ö^u = A_1 \cos ax + A_2 \sin ax$

④ $B(x) = P_k(x).(b_1 \sin ax + b_2 \cos ax)$ polinom ve trigonometrik fonk çarpımı

$y_ö^u = (A_k x^k + A_{k-1} x^{k-1} + \dots + A_1 x + A_0) \sin ax + (B_k x^k + B_{k-1} x^{k-1} + \dots + B_1 x + B_0) \cos ax$

(5) $B(x) = e^{ax}(b_1 \sin cx + b_2 \cos cx)$, $a, b_1, b_2, c \in \mathbb{R}$ üstel ve trigonometrik fonksiyon çarpımı ise

$$y_ö = e^{ax}(A_1 \cos cx + A_2 \sin cx)$$

(6) $B(x) = P_k(x) e^{ax}(b_1 \sin cx + b_2 \cos cx)$ polinom, üstel ve trigonometrik fonksiyon çarpımı ise

$$y_ö = e^{ax}\left\{(A_k x^k + A_{k-1} x^{k-1} + \dots + A_1 x + A_0)\sin cx + (B_k x^k + \dots + B_1 x + B_0)\cos cx\right\}$$

formunda aranır.

Not: $y_ö$ çözümündeki fonksiyonlar homojen kısmın çözümlerinden lineer bağımsız olmalıdır. Lineer bağımlı iseler lineer bağımsız olana kadar x in kuvvetleri ile çarpılır.

Örnek) a) $y'' + 9y = 2\sin 3x$ b) $y'' + 9y = 2x\sin 3x$ denklemlerinin genel çözümlerini bulunuz.

$\ell(\lambda) = \lambda^2 + 9 = 0 \Rightarrow \lambda^2 = -9 = 9i^2 \Rightarrow \lambda = \mp 3i$ olup

$y_h = c_1\cos 3x + c_2 \sin 3x$ dur.

a) $B(x) = 2\sin 3x$ olduğundan $y_ö = A\sin 3x + B\cos 3x$ formunda aranmalıdır. Fakat bu fonksiyonlar y_h ile lineer bağımlı olduğundan $y_ö = x(A\sin 3x + B\cos 3x)$ olarak aranır.

$$y_ö' = A\sin 3x + B\cos 3x + x(3A\cos 3x - 3B\sin 3x)$$
$$= (A - 3Bx)\sin 3x + (B + 3Ax)\cos 3x$$

$$y_ö'' = -3B\sin 3x + 3(A - 3Bx)\cos 3x + 3A\cos 3x - 3(B + 3Ax)\sin 3x$$
$$= (-6B - 9Ax)\sin 3x + (6A - 9Bx)\cos 3x$$

$$y_ö'' + 9y = 2\sin 3x$$
$$(-6B - \cancel{9Ax})\sin 3x + (6A - \cancel{9Bx})\cos 3x + 9x(\cancel{A\sin 3x} + \cancel{B\cos 3x}) = 2\sin 3x$$

$$-6B\sin 3x + 6A\cos 3x = 2\sin 3x$$

$$-6B = 2 \Rightarrow B = -1/3 \quad , \quad 6A = 0 \Rightarrow A = 0$$

$y_ö = -\frac{1}{3}x\cos 3x$ olup genel çözüm

$y = c_1\cos 3x + c_2\sin 3x - \frac{1}{3}x\cos 3x$ bulunur.

b) $y_h = c_1\cos 3x + c_2\sin 3x$ dir.

$R(x) = 2x\sin 3x$ olduğundan $y_ö = (A_1x + A_2)\sin 3x + (A_3x + A_4)\cos 3x$ formunda aranmalıdır. Fakat bu fonksiyonlarda y_h ile lineer bağımlı olan fonksiyonlar var olduğundan

$$y_ö = x\{(A_1x + A_2)\sin 3x + (A_3x + A_4)\cos 3x\}$$
$$= (A_1x^2 + A_2x)\sin 3x + (A_3x^2 + A_4x)\cos 3x$$

formunda aranmalıdır.

$$y_ö' = (2A_1x + A_2)\sin 3x + 3(A_1x^2 + A_2x)\cos 3x + (2A_3x + A_4)\cos 3x - 3(A_3x^2 + A_4x)\sin 3x$$

$$y_ö'' = (-6A_3x + 2A_1 - 3A_4)\sin 3x + 3(A_2 + (2A_1 - 3A_4)x - 3A_3x^2)\cos 3x$$
$$+ (6A_1x + 3A_2 + 2A_3)\cos 3x - 3(A_4 + (3A_2 + 2A_3)x + 3A_1x^2)\sin 3x$$

Denklemde yazılıp düzenleme yapılırsa

$$(12A_1x + 2A_3 + 6A_2)\cos 3x + (-12A_3x + 2A_1 - 6A_4)\sin 3x = 2x\sin 3x$$

$12A_1 = 0 \Rightarrow A_1 = 0$, $-12A_3 = 2 \Rightarrow A_3 = -1/6$

$2A_3 + 6A_2 = 0$

$\Rightarrow A_3 + 3A_2 = 0$

$A_2 = \frac{1}{18}$

$2A_1 - 6A_4 = 0$

$\Rightarrow A_1 - 3A_4 = 0 \Rightarrow A_4 = 0$

$y_ö = \frac{1}{18}x\sin 3x - \frac{1}{6}x^2\cos 3x$ olur.

$y = c_1\cos 3x + c_2\sin 3x - \frac{1}{18}x\sin 3x - \frac{1}{6}x^2\cos 3x$ genel çözümdür.